Probabilités pour la prépa

Paul Pichaureau
Professeur en CPGE

Cours et 353 exercices corrigés

MPSI – PCSI – PTSI
MP – PC – PSI – PT

H&K

Table des matières

Première partie

Univers finis

MPSI – PCSI – PTSI

Chapitre I

Dénombrement

J'ai 6 centimes d'euro dans ma poche. Combien de pièces ai-je ? De combien de façons puis-je les aligner sur la table ? Et si j'ai n centimes d'euro avec n quelconque ?

Au fait, combien y a-t-il d'entiers ? Et les nombres complexes ? Y en a-t-il autant ou plus que d'entiers ?

Avec un papier, un crayon et un peu de patience, il est facile de répondre aux deux premières questions. Mais la troisième et les suivantes exigent une bonne organisation. L'objet de ce chapitre est précisément de s'apprêter à affronter des situations de plus en plus complexes.

Dans l'étude du « nombre d'éléments d'un ensemble » on rencontre deux grosses difficultés. La première est de pouvoir parler d'ensembles complexes à décrire et la seconde de pouvoir parler d'ensembles infinis.

De façon tout à fait remarquable, la méthode intuitive la plus simple va nous donner la clé de ces deux problèmes. Comment compte-t-on le nombre de personnes dans une pièce ? Et bien on attribue un et un seul numéro à chaque personne, dans l'ordre : 1, 2, 3, etc., jusqu'au dernier numéro qui donne le nombre de personnes. Peu importe qui reçoit le numéro 1 ou le numéro 25, l'essentiel est que chaque personne ait un unique numéro et que chaque numéro soit associé à une seule personne.

L'idée mathématique qui est derrière ce procédé est d'établir une bijection entre l'ensemble des entiers $\{1, 2, \dots, n\}$ et l'ensemble des personnes. L'entier n désigne précisément le nombre cherché. Érigeons ce beau principe en définition.

Déf. I.1 — *On dira que deux ensembles non vides* E *et* F *ont le même cardinal si et seulement si il existe une bijection entre* E *et* F.

Nous avons supposé les ensembles non vides pour éviter de nous retrouver dans des situations logiques un peu délicates. Le mot « cardinal », emprunté aux grammairiens, désigne ici la quantité, le nombre d'éléments d'un ensemble.

Appliquons ce concept à des ensembles simples, par exemple des ensembles finis. Qu'est-ce qu'un ensemble fini ? La première idée qui vient à l'esprit est quelque chose comme $\{a, b, c\}$ ou $\{1, 2, 3\}$. C'est une bonne idée… à une bijection près !

I.1 — Ensembles finis – cardinal

Déf. et thm. I.2 — *Un ensemble* E *non vide est un* ***ensemble fini*** *si et seulement si il existe un entier non nul* n *tel que les ensembles* E *et* $[\![1 \,;\, n]\!]$ *sont en bijection.*

Dans ce cas, l'entier n *est unique. Il s'appelle le* ***cardinal*** *de* E *et se note* $\operatorname{card} \mathrm{E}$.

Si $\mathrm{E} = \varnothing$, *par convention* E *est fini et* $\operatorname{card} \mathrm{E} = 0$.

La démonstration de l'unicité de n est assez technique, c'est pourquoi je ne la donne pas. Cet entier n correspond à l'idée intuitive du nombre d'éléments. On le note aussi $\#\mathrm{E}$ ou $|\mathrm{E}|$.

Une bijection entre E et $[\![1 \,;\, n]\!]$ s'appelle une **énumération** de E : c'est une façon possible de compter les éléments de E. Ainsi un ensemble fini peut être écrit sous une des deux formes

$$\mathrm{E} = \{\varphi(1), \varphi(2), \cdots, \varphi(n)\} = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$$

en utilisant φ, une des bijections entre $[\![1 \,;\, n]\!]$ et E, ou bien en utilisant une notation indicielle.

Deux ensembles de même cardinal sont en bijection, comme nous pouvons le vérifier rapidement.

Prop. I.3 — *Si deux ensembles finis non vides* E *et* F *ont le même cardinal alors il existe une bijection entre* E *et* F.

Dém. Si E et F ont le même cardinal, alors il existe une bijection α de $[\![1 \,;\, n]\!]$ dans E et une bijection β de $[\![1 \,;\, n]\!]$ dans F dans $[\![1 \,;\, n]\!]$. Alors $\beta \circ \alpha^{-1}$ est une application de E dans F qui est bijective, car elle est la composée de deux bijections. □

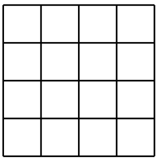
Les ensembles de cardinal n forment une classe d'ensembles invariante par la bijection. Autrement dit, et c'est un point important, n'importe quel ensemble fini de cardinal n peut servir de référence dans notre travail de dénombrement.

Thm. I.4 — Théorème de dénombrement *Soient* E *un ensemble fini non vide et* F *un ensemble quelconque. S'il existe une bijection entre* E *et* F, *alors* F *est de cardinal fini, et* $\operatorname{card} \mathrm{E} = \operatorname{card} \mathrm{F}$.

Dém. Notons n le cardinal de l'ensemble E. Il existe une bijection α de $[\![1 \,;\, n]\!]$ dans E et une bijection β de E dans F. Alors $\beta \circ \alpha$ est une bijection de $[\![1 \,;\, n]\!]$ dans F. Cela assure que l'ensemble F est fini et de cardinal n. □

C'est *la* méthode de dénombrement par excellence. Pour déterminer le cardinal d'un ensemble fini E, il suffit de le « décrire » en établissant une bijection avec un ensemble bien connu.

Principe d'addition Dessinons une grille 4×4. Combien de carrés a-t-on dessiné en tout ? Les carrés peuvent avoir plusieurs tailles : leurs côtés peuvent mesurer une unité, deux unités, etc. Une idée toute simple consiste à compter les carrés de chaque taille et à additionner les résultats entre eux. On trouve respectivement 16 carrés de côté 1,



9 de côté 2, 4 de côté 3 et 1 carré de côté 4. Ainsi, le nombre total de carrés est exactement de $16+9+4+1=30$[1].

Ce raisonnement illustre le principe le plus élémentaire du dénombrement. On partitionne l'ensemble à dénombrer en sous-ensembles deux à deux disjoints. Le théorème de base utilisé est que le cardinal de l'union de deux ensembles finis disjoints est égal à la somme des cardinaux.

Thm. I.5 — Principe d'addition *Soient* E *et* F *deux ensembles finis disjoints. Alors* $\mathrm{E}\cup\mathrm{F}$ *est fini et* $\operatorname{card}(\mathrm{E}\cup\mathrm{F})=\operatorname{card}\mathrm{E}+\operatorname{card}\mathrm{F}$.

Dém. Nous allons utiliser le théorème de dénombrement. Notons $n=\operatorname{card}\mathrm{E}$ et $p=\operatorname{card}\mathrm{F}$. Il s'agit donc d'exhiber une bijection entre $[\![1\,;n+p]\!]$ et $\mathrm{E}\cup\mathrm{F}$. Pour cela, partons d'une bijection α entre $[\![1\,;n]\!]$ et E et d'une bijection β entre $[\![1\,;p]\!]$ et F.
Définissons l'application γ entre $[\![1\,;n+p]\!]$ et $\mathrm{E}\cup\mathrm{F}$ de la façon suivante :

$$\forall k\in[\![1\,;n+p]\!]\quad \begin{array}{lll} \text{si} & 1\leqslant k\leqslant n & \gamma(k)=\alpha(k)\\ \text{si} & p+1\leqslant k\leqslant n+p & \gamma(k)=\beta(k-p)\end{array}$$

La fonction γ est surjective, puisque

$$\gamma\langle[\![1\,;n]\!]\rangle=\mathrm{E}\qquad\text{et}\qquad \gamma\langle[\![p+1\,;n+p]\!]\rangle=\mathrm{F}$$

$$\text{donc}\qquad \mathrm{E}\cup\mathrm{F}=\gamma\langle[\![1\,;n]\!]\rangle\cup\gamma\langle[\![p+1\,;n+p]\!]\rangle\subset\gamma\langle[\![1\,;n+p]\!]\rangle$$

De plus, elle injective. En effet, si deux entiers k et k' vérifient $\gamma(k)=\gamma(k')$, alors ou bien $\gamma(k)\in\mathrm{E}$, auquel cas $\alpha^{-1}(\gamma(k))=\alpha^{-1}(\gamma(k'))$ implique $k=k'$, ou bien $\gamma(k)$ est dans F et on trouve aussi $k=k'$ en appliquant β^{-1}.
L'application γ est donc une bijection de $[\![1\,;n+p]\!]$ dans $\mathrm{E}\cup\mathrm{F}$, et donc $\mathrm{E}\cup\mathrm{F}$ est fini et de cardinal $n+p$. □

Ce résultat se généralise par récurrence à l'union disjointe de plusieurs ensembles finis.

Cor. I.5.1 — *Soient* $\mathrm{E}_1,\mathrm{E}_2,\ldots,\mathrm{E}_p$ *p ensembles finis ($p\geqslant 2$). Si ces ensembles sont disjoints deux à deux, alors* $\mathrm{E}_1\cup\mathrm{E}_2\cup\cdots\cup\mathrm{E}_p$ *est fini et*

$$\operatorname{card}(\mathrm{E}_1\cup\mathrm{E}_2\cup\cdots\cup\mathrm{E}_p)=\sum_{k=1}^{p}\operatorname{card}(\mathrm{E}_k)$$

En particulier, si $\mathrm{A}_1,\mathrm{A}_2,\ldots,\mathrm{A}_p$ *est une partition de* E*, alors* $\operatorname{card}\mathrm{E}=\sum_{k=1}^{k=p}\operatorname{card}\mathrm{A}_k$.

Le principe d'addition permet de démontrer plusieurs propriétés utiles du cardinal. Démontrons tout d'abord, à partir du principe d'additivité, que les sous-ensembles d'un ensemble sont finis.

Thm. I.6 — *Soient* E *un ensemble fini et* A *une partie de* E.
Alors A *est un ensemble fini et* $\operatorname{card}\mathrm{A}\leqslant\operatorname{card}\mathrm{E}$.
Si, de plus, $\operatorname{card}\mathrm{A}=\operatorname{card}\mathrm{E}$ *alors* $\mathrm{A}=\mathrm{E}$.

1. En guise d'exercice, on pourra traiter le cas général d'une grille $n\times n$.

Formulaire : combinaisons – sommes finies

Ex. I.2	$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$	$n \in \mathbb{N}^*$
Ex. I.2	$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$	$n \in \mathbb{N}^*$
	$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$	$n \in \mathbb{N}^*$
	$\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$	$(n,k) \in \mathbb{N}^2,\ \ 0 \leqslant k \leqslant n$
Symétrie	$\displaystyle\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$	$n \in \mathbb{N},\ \ k \in \mathbb{Z}$
Formule de Pascal	$\displaystyle\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$	$n \in \mathbb{N},\ \ k \in \mathbb{Z}$
Petite formule	$\displaystyle k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$	$n \in \mathbb{N},\ \ k \in \mathbb{Z}$
Formule de Vandermonde	$\displaystyle\sum_{k=0}^{a+b} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$	$(a,b,n) \in \mathbb{N}^2$
Ex. I.2	$\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$	$(k,n,p) \in \mathbb{N}^2$
Ex. I.27	$\displaystyle\binom{p}{k}\binom{n}{p} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$	$(k,n,p) \in \mathbb{N}^2$
Ex. I.28	$\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p-k}{m}\binom{k}{n} = \binom{p+1}{m+n+1}$	$(m,n,p) \in \mathbb{N}^2$

Exercices de référence

Exercice de référence I.1 Anagrammes

1. *Combien y a-t-il d'anagrammes du mot* ANGELOT *?*
2. *Combien y a-t-il d'anagrammes du mot* BAOBAB *?*

Solution

Les anagrammes d'un mot sont obtenus par permutation des lettres de ce mot.

1. Dans le cas du mot *ANGELOT*, on cherche le nombre des permutations de $\{A, N, G, E, L, O, T\}$, soit 7 lettres distinctes. C'est directement une question de cours : il y en a $7! = 5040$.

2. Dans le cas du mot *BAOBAB*, les choses se compliquent. On dispose des 3 lettres A, B, et O et on cherche des mots écrits avec 6 lettres dont 3 « B » et 2 « A ».
   Une première façon de faire consiste à choisir la place des lettres, parmi 7 places possibles.
   - D'abord les places des 3 « B », il y a $\binom{6}{3}$ choix possibles ;
   - puis les places des 2 « A » parmi les 3 restantes : $\binom{3}{2}$ choix ;
   - puis la dernière place pour le « O ».

   Il y a donc $$\binom{6}{3} \times \binom{3}{2} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2}{3!\,2!} = \frac{6!}{3!\,2!} = 60$$ anagrammes.

   Le lecteur consciencieux vérifiera que l'ordre de placement des lettres (d'abord « O », puis « A », etc.) dans ce raisonnement n'a pas d'importance.

   On peut aussi utiliser un principe de symétrie. Distinguons momentanément les 3 « B » et les 2 « A ». Il y a alors 6! permutations de $\{B_1, A_1, O, B_2, A_2, B_3\}$. Mais la symétrie introduite fait la distinction entre les mots $B_1A_1OB_2A_2B_3$ et $B_3A_2OB_1A_1B_2$ par exemple. Il faut tenir compte des 3! façons de numéroter les « B » et des 2! façons de numéroter les « A ». On regroupe les mots « indicés » par paquets de $3! = 6$ puis on efface la numérotation des B. On se retrouve avec 6 fois moins de mots, de la forme BA_1OBA_2B et BA_2OBA_1B par exemple. On fait ensuite de même avec les A. On trouve encore $\dfrac{6!}{3!\,2!}$ anagrammes possibles.

Exercice de référence I.2 Une somme classique

1. *Démontrer que, pour* $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.
2. *Retrouver cette égalité par un dénombrement : compter les sous-ensembles à* $p+1$ *éléments de* $[\![1 \,;\, n+1]\!]$ *d'après leur plus grand élément.*
3. *Retrouver que* $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ *(considérer le cas* $p = 1$*).*
4. *Calculer* $\sum\limits_{k=1}^{n} k(k-1)$ *et retrouver* $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2$.

Exercices d'entraînement

Ex. I.10 — Dans une pièce il y a 25 personnes.

1. De combien de façons différentes peut-on les compter ?
2. De combien de façons si l'on compte une certaine personne toujours en premier ?
3. Et s'il y a 15 filles et 10 garçons et que l'on compte d'abord les filles et ensuite les garçons ?

Ex. I.11 —

1. Une compagnie d'aviation dessert n villes. Tous les trajets entre les villes sont possibles. Combien de billets différents doit-elle éditer ?
2. Dans une soirée, n personnes se serrent la main. Combien de poignées de main sont échangées ?

Ex. I.12 — Code Morse Une lettre de l'alphabet Morse est représentée par une succession de signaux courts (les « points ») et de signaux longs (les « traits »). Combien de lettres différentes peut-on coder avec des séquences d'au plus n symboles ? Trouver le plus petit n suffisant pour coder les 26 lettres de l'alphabet.

Ex. I.13 — On constitue un comité de 8 personnes choisies parmi 15 femmes et 12 hommes.

1. Combien y a-t-il de comités possibles ?
2. Même question si le comité contient 4 hommes et 4 femmes.
3. Même question si le comité compte au moins 2 femmes.

Ex. I.14 — Toujours des anagrammes On dispose de 10 jetons de Scrabble portant les lettres de l'alphabet de « A » à « J ».

1. Combien de mots peut-on écrire avec ces dix lettres ?
2. Combien de mots peut-on écrire avec ces dix lettres où « B », « A » et « C » apparaissent dans cet ordre et côte à côte ?
3. Combien de mots peut-on écrire avec ces dix lettres où « B », « A » et « C » apparaissent dans cet ordre ?
4. Combien de mots peut-on écrire avec ces dix lettres où « B » précède « A » et « D » précède « C » ?

Ex. I.15 — Soit E un ensemble fini de cardinal $n > 0$. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{X \in \mathscr{P}(E)} \operatorname{card}(X)$.

★ **Ex. I.16 —** Soit E un ensemble fini, non vide, à n éléments.

1. Déterminer le nombre de partitions de E en deux sous-ensembles (l'un pouvant être vide).
2. Déterminer le nombre de partitions de E en sous-ensembles contenant tous 2 éléments (en supposant n pair).
3. On suppose que E a $a \times b$ éléments. Déterminer le nombre de partitions de E en a parties à b éléments.

Solutions

Ex. I.10 — 1. Il s'agit simplement de permuter 25 personnes, d'où 25! façons de les compter.
2. On permute les 24 autres personnes, donc 24! comptages possibles.
3. On permute filles puis garçons. D'après le principe de multiplication, $15! \times 10!$ méthodes possibles.

Ex. I.11 — 1. Les billets sont des couples (D, A) de villes (D pour la ville de départ et A pour la ville d'arrivée). Il s'agit bien de couples et non de combinaisons, puisqu'il faut faire la distinction entre ville de départ et d'arrivée. Cela fait un total de $n(n-1)$ billets différents.
2. Une poignée de main peut être représentée par une combinaison $\{p_1, p_2\}$ de deux personnes, puisqu'on ne fait pas de distinction entre deux personnes. Il y a $\binom{n}{2} = n(n-1)/2$ poignées de mains échangées.

Ex. I.12 — Code Morse En introduisant k, la longueur d'une lettre, avec $1 \leqslant k \leqslant n$, on trouve $\sum_{k=1}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$ lettres possibles. Il faut au moins 4 signaux pour coder 26 lettres, ce qui correspond à l'usage.

Ex. I.13 — 1. Il s'agit d'une combinaison de 8 personnes parmi les 27 possibles : il y en a $\binom{27}{8}$.
2. On choisit d'abord 4 femmes parmi les 15, puis 4 hommes parmi les 12 : $\binom{15}{4} \times \binom{12}{4}$ comités possibles.
3. L'ensemble complémentaire est celui des comités avec au plus une femme. Il y a $\binom{12}{8}$ comités sans femme et $\binom{15}{1}\binom{12}{8}$ comités avec une femme. Il y a donc $\binom{27}{8} - \binom{12}{8} - \binom{15}{1}\binom{12}{8}$ comités avec au moins deux femmes.

Ex. I.14 — Toujours des anagrammes
1. Il y a 10! anagrammes d'un mot écrit avec 10 lettres distinctes.
2. En considérant « BAC » comme une lettre unique, il y a 8 lettres à placer : 8! mots possibles.
3. On choisit d'abord 3 places parmi les 10 possibles, ce qui fait $\binom{10}{3}$ choix possibles. On y place « B », « A » et « C » dans cet ordre. Puis on fait un anagramme avec les 7 lettres restantes que l'on place telles quelles aux places restantes : $\binom{10}{3} \times 7!$ mots possibles.
4. Même principe : on choisit les places de « B » et « A », puis de « D » et « C », puis on place les 6 lettres restantes dans un ordre quelconque : $\binom{10}{2}\binom{8}{2} \times 6!$ mots possibles.

Ex. I.15 — On procède en rangeant les parties de X par cardinal

$$\sum_{\mathrm{X}\in\mathscr{P}(\mathrm{E})} \operatorname{card}\mathrm{X} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{\substack{\mathrm{X}\in\mathscr{P}(\mathrm{E}) \\ \operatorname{card}\mathrm{X}=k}} \operatorname{card}\mathrm{X} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{\substack{\mathrm{X}\in\mathscr{P}(\mathrm{E}) \\ \operatorname{card}\mathrm{X}=k}} k$$

Dans la seconde somme, il y a autant de termes que de sous-ensembles de E à k éléments, c'est-à-dire $\binom{n}{k}$. De plus tout ces termes ont la même valeur, d'où

$$\sum_{\mathrm{X}\in\mathscr{P}(\mathrm{E})} \operatorname{card}\mathrm{X} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k = n2^{n-1}$$ cf. exercice I.25

Ex. I.16 — 1. Choisissons un des 2^n sous-ensembles quelconques A de E. On lui associe alors une partition de E : $\{\mathrm{A}, \bar{\mathrm{A}}\}$. Mais à une partition en deux sous-ensembles $\{\mathrm{A}, \mathrm{B}\}$ de E on peut associer l'un des deux sous-ensembles A ou B.
Il y a donc $2^n/2 = 2^{n-1}$ partitions de E en deux sous-ensembles.
2. Choisissons d'abord un ensemble A_1 à 2 éléments de E : il y en a $\binom{n}{2}$. Puis un second ensemble A_2 de 2 éléments parmi les $n-2$ restants : $\binom{n-2}{2}$, et ainsi de suite jusqu'à $\mathrm{A}_{n/2}$, pour épuiser les éléments de E. On a ainsi $\prod_{k=0}^{n/2} \binom{n-2k}{2} = \frac{n!}{2^{n/2}}$ choix possibles.
Toutes les permutations de $(\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_{n/2})$ correspondent à la même partition de E. D'après le principe de symétrie, on trouve donc $\dfrac{n!}{2^{n/2}(n/2)!}$ partitions de cette sorte.

Chapitre II

Probabilité

II.1 — L'univers des possibles

Si « aléatoire » est compris au sens d'« imprévisible », alors toute expérience humainement réalisable est aléatoire. Cela paraît évident avec une expérience aussi simple que le lancer d'un dé. Ce lancer est déterministe : avec une capacité de calcul illimitée et une connaissance parfaite des conditions initiales, le résultat du lancer pourrait être calculé. Mais la moindre imprécision dans la mesure des conditions initiales, le plus petit changement dans les conditions de l'expérience modifieront énormément ce résultat. Et comme, justement, une précision illimitée ou un contrôle parfait sont impossibles à réaliser en pratique, on préfère qualifier cette expérience d'aléatoire.

Dans le cadre de la mécanique quantique, l'aléatoire devient une donnée constitutive des systèmes. Rien n'est prévisible exactement. Les événements surviennent avec une certaine probabilité (prévisible, dans une certaine mesure). Sans aller jusqu'à de tels extrêmes, toute expérience réalisable dans un laboratoire est fortement teintée d'aléatoire. Les imprécisions expérimentales, les incertitudes de mesure, la complexité des systèmes (des systèmes vivants, notamment) engendrent un inconnu que les scientifiques recouvrent d'un voile pudique marqué « aléatoire ».

Pourtant cet aléatoire s'étudie de façon relativement commode. La première étape de cette modélisation consiste à choisir un ensemble de référence Ω dont les éléments représenteront tous les résultats possibles de l'expérience. Il faut bien comprendre que ce choix d'univers est arbitraire, et qu'il simplifie énormément le problème initial.

Un dé à 6 faces Lorsque l'on lance un dé, un résultat de l'expérience serait la position du dé dans le référentiel terrestre, la position de l'expérimentateur, la température de la pièce, etc. Après tout, il n'y a aucune raison de se limiter à la lecture d'un simple numéro sur une seule des faces du dé.

Mais il est clair que la modélisation la plus évidente est de prendre $\Omega = [\![1 ; 6]\!]$, l'ensemble des entiers de 1 à 6.

Deux lancers d'un dé à 6 faces Lançons ce même dé deux fois. Ici, la représentation la plus naturelle des résultats est l'ensemble des couples de deux nombres compris entre 1 et 6

$$\Omega = \left\{(i, j) \text{ avec } i \in [\![1 ; 6]\!],\ j \in [\![1 ; 6]\!]\right\} = [\![1 ; 6]\!]^2$$

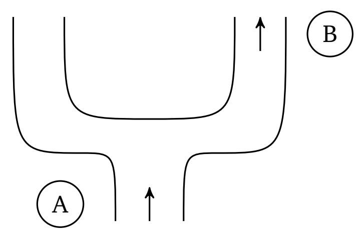
Le premier entier d'une paire représente le résultat du premier lancer, le second le résultat du second lancer.

Chapitre III

Indépendance, probabilité conditionnelle

La plupart du temps, lorsqu'un processus expérimental complexe est mis en jeu, le résultat final est difficile à décrire directement. Il est préférable de décomposer l'expérience globale en plusieurs étapes. La notion de probabilité conditionnelle permet d'étudier séparément chacune des étapes.

III.1 — Deux points de vue



Replaçons-nous au carrefour du début du chapitre II. Deux observateurs A et B comptent les voitures grises. L'observateur A se situe avant l'embranchement et observe toutes les voitures arrivant. L'observateur B se situe sur l'embranchement de droite et n'observe que les voitures sur cette partie de la route.

L'observateur A compte N voitures, dont N_G sont grises. L'observateur B compte N_D voitures ayant tourné à droite, dont $N_{G\cap D}$ sont grises.

Les deux observateurs n'observent pas les mêmes événements. Le premier peut estimer la probabilité de l'événement G « une voiture arrivant au carrefour est grise ». De son point de vue $P(G) \simeq N_G/N$. L'observateur B ne voit pas les mêmes voitures que A. Il ne peut estimer que la probabilité qu'une voiture qui a tourné à droite soit grise. On peut la noter $P_D(G)$ et estimer que $P_D(G) \simeq N_{G\cap D}/N_D$.

Essayons de calculer la probabilité qu'une voiture arrivant à l'embranchement soit grise *et* tourne à droite. On cherche donc $P(G \cap D)$. Bien sûr $P(G \cap D) \simeq N_{G\cap D}/N$. Seul l'observateur A a accès à cette probabilité. De là où il est placé, B ne peut pas la calculer.

Pour le premier observateur, l'univers Ω est l'ensemble des voitures arrivant à l'embranchement, pour le second c'est l'ensemble Ω_D des voitures ayant tourné à droite. Mais Ω_D est un sous-ensemble de Ω. Les probabilités que calcule B sont donc accessibles à A. Par exemple

$$P_D(G) \simeq \frac{N_{G\cap D}}{N_D} = \frac{N_{G\cap D}}{N}\frac{N}{N_D} \simeq \frac{P(G\cap D)}{P(D)}$$

En généralisant cette égalité, on définit une probabilité sur l'univers Ω_D issue de la probabilité sur l'univers complet de l'expérience.

Chapitre IV

Variable aléatoire réelle finie

IV.1 — Définition

Revenons sur un point de vocabulaire. Considérons une expérience aléatoire bucolique : choisir un brin d'herbe dans une prairie verdoyante. Qu'appelle-t-on « résultat » de cette expérience ? L'ensemble des brins d'herbes collectés ? La prairie ? La prairie et la couleur du ciel, la position des vaches, le sourire de la crémière ?

Soyons sérieux un instant. En bons scientifiques, nous voudrions que le résultat soit une quantité mesurable : un nombre réel. Par exemple le poids du brin d'herbe, sa teneur en eau, sa concentration en chlorophylle, etc. Considérons sa taille en centimètres, qui est un nombre réel entre 0 et 100. Est-ce que ce nombre permet de « remonter » au résultat de l'expérience ? Bien sûr que non : il la résume, mais l'ensemble $[\![0 ; 100]\!]$ n'est pas l'univers de l'expérience. Ce nombre réel dépend du résultat de l'expérience ; il est « aléatoire » dans le sens où sa valeur est issue d'une expérience aléatoire.

Cette façon d'associer une valeur numérique à chaque résultat de l'expérience est si courante que l'on définit

> **Déf. IV.1 — Variable aléatoire réelle finie** *Soit* (Ω, P) *un espace probabilisé fini et* E *un ensemble non vide. On appelle* ***variable aléatoire*** *toute application de* Ω *dans* E*.*
>
> *Lorsque* $\mathrm{E} \subset \mathbb{R}$*, on parle de variable aléatoire réelle.*

Nous n'abordons dans ce chapitre que les variables aléatoires à valeurs réelles.

Support L'ensemble des valeurs prises par X, noté $\mathrm{X}(\Omega)$, s'appelle le **support** de la variable aléatoire. Comme Ω est fini, cet ensemble l'est également. On peut le noter

$$\mathrm{X}(\Omega) = \{x_i, \quad i \in [\![1 ; p]\!]\}$$

Événements associés Une variable aléatoire ne fait pas que transformer les événements élémentaires en réels : elle redéfinit complètement l'espace d'étude. Ainsi, tout sous-ensemble de $\mathbb{R}$ va devenir un événement « étudiable ». Soyons plus précis.

> **Thm. IV.2 —** *Soit* X *une variable aléatoire sur un espace probabilisé fini* (Ω, P)*. Alors pour tout sous-ensemble* A *de* $\mathbb{R}$*, l'ensemble* $\mathrm{X}^{-1}\langle \mathrm{A} \rangle$ *est un événement.*

Chapitre V

Vecteurs aléatoires réels finis

V.1 — Couple de variables aléatoires, lois

Exemple V.1 Considérons une expérience aléatoire en deux temps : une urne contient 6 boules numérotées de 1 à 6. On en tire une et on note son numéro X. On retire alors toutes les boules dont le numéro est strictement supérieur à X. On tire une nouvelle boule, dont le numéro est noté Y.

La première de ces deux expériences est classique ; on sait que X suit la loi uniforme sur $[\![1 ; 6]\!]$. La seconde est fortement liée à la première. L'événement $(X = k)$ étant réalisé (avec $k \in [\![1 ; 6]\!]$), Y suit la loi uniforme sur $[\![1 ; k]\!]$.

Une telle façon de décrire un processus aléatoire est plutôt naturelle. On réalise une succession d'étapes, en ayant une connaissance parfaite du lien entre une étape et la suivante. Notre objectif est alors d'expliciter complètement la variable aléatoire « finale » Y.

On va utiliser le principe de modélisation suivant : nous nous plaçons dans un univers Ω très large et étudions X et Y comme un tout, comme une seule variable aléatoire (X, Y) à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. Rien ne nous empêchera ensuite d'en extirper quelques informations utiles, comme la loi de X ou celle de Y. Ainsi le couple (X, Y) prend ses valeurs dans l'ensemble

$$\Omega_{X,Y} = \{(i, j), \quad 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 6\}$$

On peut représenter cet ensemble par un nuage de points ou par un tableau a deux entrées (que nous rempliront progressivement par les probabilités).

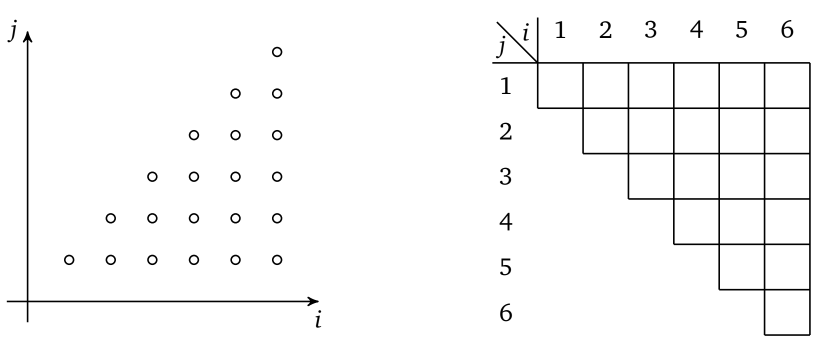


Figure V.1 : *Deux représentations de $\Omega_{X,Y}$.*

Mais on va justement s'éloigner de cet ensemble limité et prendre nos aises. Les valeurs de X s'étalent de 1 à 6. De même, Y va de 1 à 6 : même si les valeurs de Y « dépendent » des valeurs

Deuxième partie

Univers infinis dénombrables

MP – PC – PSI – PT

Chapitre VI

Univers dénombrables – Tribus

VI.1 — Ensembles dénombrables

Des ensembles tels que $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ sont qualifiés d'« infinis » car on pourra toujours trouver N éléments distincts de ces ensembles, quel que soit le nombre N fixé d'avance.

Dans le premier chapitre de ce livre, nous avions donné la définition suivante de l'expression « avoir le même cardinal »

Déf. VI.1 — *On dira que deux ensembles non vides* E *et* F *ont le même cardinal si et seulement si il existe une bijection entre* E *et* F.

Essayons donc de savoir si ces différents ensembles infinis ont le même cardinal, c'est-à-dire le même « nombre » d'éléments.

Est-ce que $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^*$ ont le même cardinal ? En d'autre termes, y a-t-il une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^*$? La réponse est oui ! Par exemple, l'application f définie sur $\mathbb{N}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad f(n) = n + 1$$

et qui est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ réalise un décalage vers la droite de l'ensemble $\mathbb{N}$.

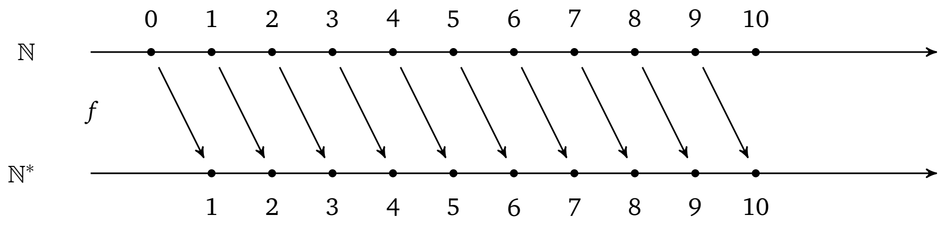


Figure VI.1 : *Un exemple de bijection entre* $\mathbb{N}$ *et* $\mathbb{N}^*$.

Cette application est bien bijective : sa bijection réciproque est le décalage vers la gauche défini sur $\mathbb{N}^*$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad f^{-1}(n) = n - 1$$

Mais une minute... ainsi $\mathbb{N}$ aurait autant d'éléments qu'un de ses sous-ensembles ? C'est surprenant ! Puisque $\mathbb{N}^*$ est strictement inclus dans $\mathbb{N}$, il devrait être plus petit que $\mathbb{N}$, non ? Tout dépend de ce qu'on appelle « petit ». Au sens de l'inclusion, $\mathbb{N}^*$ est bien strictement plus

Chapitre VII

Probabilité dans un univers dénombrable

VII.1 — Une nouvelle définition

Nous n'avons pas fini d'étudier l'expérience « lancer une pièce de monnaie jusqu'à obtenir Face ». Nous avons vu au chapitre précédent que cette expérience prenait sa place dans l'univers

$$\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$$

des suites infinies de 0 et de 1. Ici 0 réprésente Pile et 1 représente Face. Comme je l'ai déjà dit, cet univers n'est pas dénombrable, et son étude complète dépasse donc les limites de notre programme.

Pourquoi ne pas prendre un univers plus simple ? Par exemple celui qui s'écrit

$$\Omega = \{\infty, 1, 01, 001, 0001, \dots\}$$

C'est l'ensemble des suites ne contenant que des Piles et se terminant par un Face. On lui ajoute l'événement « ∞ » qui correspond à une suite infinie de Piles.

Il y a une bijection naturelle entre Ω et $\mathbb{N}$: la fonction φ qui fait correspondre à « ∞ » l'entier 0, et qui fait correspondre aux autres résultats le nombre de Piles observés. L'univers Ω est donc dénombrable. Conformément à ce que nous avions dit à l'exemple VI.2.4 (p. 185) du chapitre précédent, la tribu « naturelle » d'étude est $\mathscr{P}(\Omega)$.

Comment définir une probabilité sur un tel univers ? Les axiomes II.3 ne suffisent plus, car il ne permettent pas de traiter des unions infinies d'événements (comme par exemple l'union de tous les événements de Ω). Transformons le second axiome pour inclure ce cas.

Déf. VII.1 — Axiomes des probabilités *Soit* $(\Omega, \mathscr{T})$ *un espace probabilisable. On appelle* ***probabilité*** *sur* $(\Omega, \mathscr{T})$ *la donnée d'une fonction* $\mathrm{P} : \mathscr{T} \longrightarrow [\,0\,;\,1\,]$ *telle que*

i) $\mathrm{P}(\Omega) = 1$

ii) *pour toute suite d'événements* $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux à deux incompatibles*

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{P}(\mathrm{A}_n) \qquad \textit{σ–additivité}$$

La donnée d'un espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{T})$ *et d'une probabilité* P *sur cet espace définit un* ***espace probabilisé*** $(\Omega, \mathscr{T}, \mathrm{P})$.

Chapitre VIII

Variable aléatoire discrète

VIII.1 — Une nouvelle définition

Tout comme au chapitre précédent, nous nous plaçons désormais dans le cadre général des univers infinis. La notion de variable aléatoire doit alors être redéfinie, et nous allons en profiter pour lui donner une plus grande généralité.

Déf. VIII.1 — *Soit* $(\Omega, \mathscr{T}, \mathrm{P})$ *un espace probabilisé. On appelle* ***variable aléatoire discrète*** *à valeurs dans un ensemble* E *toute application* X *de* Ω *dans* E *telle que*

i) *l'ensemble* $\mathrm{X}(\Omega)$ *est au plus dénombrable ;*

ii) *si* $x \in \mathrm{X}(\Omega)$ *alors l'ensemble* $\mathrm{X}^{-1}\langle\{x\}\rangle$ *est un événement :*

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad \mathrm{X}^{-1}\langle\{x\}\rangle \in \mathscr{T}$$

L'idée sous-jacente est que l'on veut s'assurer que « $\mathrm{X} = x$ » puisse bien s'interpréter comme un événement. Si X est une variable aléatoire discrète et si $x \in \mathrm{X}(\Omega)$, l'ensemble $\mathrm{X}^{-1}\langle\{x\}\rangle$, qui donc est un événement, est noté plus simplement $(\mathrm{X} = x)$.

Cette définition s'applique aussi bien à des variables à support fini qu'à des variables à support infini dénombrable. Comme les variables finies ont fait l'objet de la première partie de cet ouvrage, nous supposerons fréquemment que $\mathrm{X}(\Omega)$ est dénombrable.

Cette définition généralise la précédente dans deux directions. La première est que l'ensemble d'arrivée E n'est pas nécessairement $\mathbb{R}$: il peut s'agir de $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{C}$, etc. Nous tirons parti de ce point pour étudier les variables aléatoires discrètes et les couples de variables aléatoires discrètes dans ce même chapitre (voir un peu plus bas).

Exemple VIII.1 Dans le cas où $\mathrm{E} = \mathbb{R}$, on parle de variable aléatoire réelle discrète. Dans ce cas, les événements $(\mathrm{X} = x)$ sont vides, sauf pour des points isolés de $\mathbb{R}$.

L'ensemble $\mathrm{X}(\Omega)$ est un ensemble infini qui ne contient pas d'intervalles de $\mathbb{R}$ (sinon il ne serait pas dénombrable). D'un point de vue topologique, puisque $\mathrm{X}(\Omega)$ ne contient aucun voisinage de ses points, tous les points de $\mathrm{X}(\Omega)$ sont isolés. Typiquement $\mathrm{X}(\Omega)$ est $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}$, etc.

Chapitre IX

Espérance

Nous poursuivons notre revue des modifications à apporter à la théorie dans le cas des variables aléatoires discrètes. Au chapitre précédent nous les avons définies, ainsi que leur loi.

Dans le cadre des variables aléatoires finies, nous avons rencontré les notions d'espérance, variance, etc. Comment les définir ici ?

IX.1 — Le problème de la somme infinie

Pour définir l'espérance d'une variable aléatoire réelle discrète X on voudrait généraliser la formule

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \sum_{x \in \mathrm{X}(\Omega)} x\,\mathrm{P}(\mathrm{X} = x)$$

bien établie dans le cas d'un support $\mathrm{X}(\Omega)$ fini.

Si le support est dénombrable, on peut le noter $\mathrm{X}(\Omega) = \{x_i, i \in \mathbb{N}\}$. L'espérance deviendrait-elle alors

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \sum_{i \in \mathbb{N}} x_n\,\mathrm{P}(\mathrm{X} = x_n) \qquad ?$$

Mais c'est une somme infinie ? Elle doit être convergente ! Mieux ! Elle doit être *absolument convergente* ! Essayons de comprendre pourquoi.

Du point de vue technique, la notion de somme infinie pose deux difficultés principales. La première est bien connue : c'est celle de la convergence de la somme. Par exemple la somme de la famille de réels

$$1 \qquad -1 \qquad 1 \qquad -1 \qquad 1 \qquad \cdots$$

n'a pas de sens en tant que nombre réel. Cette somme effectuée terme après terme prend alternativement les valeurs 1 et -1. Ces sommes partielles ne convergent vers aucune valeur. La somme de ces réels ne semble pas pouvoir être définie.

Lorsqu'elle peut l'être, nous rencontrons une autre difficulté. Considérons par exemple la famille de réels

$$1 \quad -1 \quad \frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad -\frac{1}{3} \quad \cdots \quad = \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\} \cup \left\{-\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$$

Comment définir la somme des termes de cette famille ? Le lecteur de ces lignes peut penser à additionner les termes dans l'ordre dans lequel je les lui donne ci-dessus. On trouve alors successivement 1, puis 0, puis 1/2, puis 0, puis 1/3, puis 0, etc. Les sommes partielles impaires

Chapitre X

Convergence et approximations

X.1 — Introduction

Si vous le souhaitez, vous pouvez sauter cette introduction et commencer votre lecture à la section suivante.

La télépathie, ça marche ! Enfin c'est ce qu'un jour une de mes aimables voisines bulgares m'a affirmé avec véhémence. Sous le sceau du plus grand secret (aujourd'hui brisé), elle m'a révélé que sa sœur et elle sont si proches qu'elles peuvent lire dans les pensées l'une de l'autre.

J'étais plus que curieux de voir un tel phénomène se produire. Aussi leur ai-je demandé une petite démonstration. « Aucun problème, me dit Boyana (ma voisine). J'appelle tout de suite ma sœur Albana, et nous allons nous livrer à une expérience qui te convaincra sûrement ! »

Voici ce dont nous avions convenu : Boyana s'assoirait dans une pièce calme, en face d'une feuille de papier. Pour ma part, je me tiendrais derrière elle. À intervalles réguliers, j'enverrai un SMS à sa sœur Albana contenant un chiffre au hasard entre 0 et 9. Albana penserait très fort à ce chiffre, Boyana le devinerait par télépathie et l'écrirait sur une feuille de papier.

Nous réalisâmes l'expérience avec une première série de 10 chiffres. À la fin de l'expérience, Boyana avait l'air dépité. « J'avais du mal à me concentrer, je ne sais pas si ça a bien marché. » J'ai alors vérifié les correspondances : il y en avait 3.

« Incroyable, Paul ! » s'exclama Boyana. « En moyenne, j'aurais dû trouver une seule correspondance, or j'en trouve trois. N'est-ce pas extraordinaire ? »

Je réfléchis un moment. Supposons que les deux sœurs ne soient pas télépathes et que Boyana écrive un chiffre complètement au hasard sur la feuille. La probabilité qu'elle y parvienne à un coup donné est $1/10$. Si je suppose (pour me simplifier l'étude) que les choix se font indépendamment les uns des autres, le nombre de correspondances suit une loi binomiale de paramètres 10 et $1/10$.

Comme le dit justement Boyana, le nombre moyen de correspondances est donc de 1.

Boyana trouve exceptionnel que le résultat observé s'éloigne de la moyenne attendue. Mais en cela elle a tort. Comme beaucoup de gens, Boyana pense que l'espérance est la valeur la plus probable d'une variable aléatoire. Ce n'est en général pas le cas.

Pourtant, dans le cas de la loi binomiale $\mathscr{B}(10, 1/10)$, Boyana a raison, comme on le voit sur la table de cette loi.

Annexe A

D'autres horizons

Lorsqu'on essaye de munir un espace quelconque Ω d'une probabilité, de nombreuses difficultés théoriques et pratiques surgissent. Et pourtant les mathématiciens ont étendu cette « probabilisation » à des domaines extrêmement variés, aussi bien en mathématiques fondamentales qu'appliquées (à la biologie, aux finances, aux statistiques, etc.).

J'aimerais, pour finir, vous donner un aperçu de ses difficultés, afin de mieux éclairer les limites et les choix des programmes de CPGE.

A.1 — Tribus et boréliens

Le point de départ demeure un ensemble Ω qui contient tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire. Mais cet ensemble Ω est désormais indénombrable. C'est le nombre de chemins possibles allant d'un point à un autre, ou bien l'ensemble des programmes informatiques, ou encore l'ensemble des théorèmes énonçables en mathématiques, etc.

Bien que tout événement soit un sous-ensemble de Ω, il n'est pas possible, en général, de développer une théorie des Probabilités satisfaisante en supposant que *tout* sous-ensemble de Ω est un événement. Au lieu de cela, la dénomination « événement » va être réservée à une partie seulement des sous-ensembles de Ω.

Sur cette partie des sous-ensembles de Ω, les opérations ensemblistes précédentes doivent toujours avoir un sens. Cela motive la définition des tribus vue au chapitre VII. Rappelons-la.

Déf. A.1 — Axiomes des tribus *Une partie $\mathscr{T}$ de $\mathscr{P}(\Omega)$ est une* **tribu** *(ou une* ***σ–algèbre****) si et seulement si*

- *i)* $\varnothing \in \mathscr{T}$;
- *ii)* *si* $\mathrm{A} \in \mathscr{T}$ *alors* $\bar{\mathrm{A}} \in \mathscr{T}$;
- *iii)* *si* $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite d'éléments de* $\mathscr{T}$ *alors* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n \in \mathscr{T}$.

Ces trois propriétés suffisent pour que toutes les opérations ensemblistes aient un sens. C'est une sorte de préalable à la définition d'une probabilité sur Ω.

La méthode de raisonnement la plus courante consiste à partir d'une famille de sous-ensembles de Ω, à les appeler « événements », puis à utiliser la plus petite tribu possible qui contient ces événements (les événements de départ ne formant pas nécessairement une tribu).

Index

Cet ouvrage
est composé en Bitstream Charter,
créée par Matthew Carter.

Le logiciel de composition est pdfLaTeX
(avec l'extension microtype).

Les fontes mathématiques
proviennent de l'extension
Mathdesign.