CHAPITRE 4

Théorèmes généraux de la résistance des matériaux

4.1 Le théorème de Castigliano

Le théorème de Castigliano est l'un des théorèmes fondamentaux de la résistance des matériaux. Il permet de calculer les déplacements en un point quelconque d'un système élastique linéaire. Son énoncé usuel considère un système élastique linéaire doté de liaisons fixes. Mais on l'étend facilement au cas des systèmes dotés de liaisons élastiques linéaires (voir § 4.1.3).

4.1.1 Énoncé usuel

Étant donné un système élastique linéaire ne possédant que des liaisons fixes, et chargé par un système d'actions extérieures (Q_1, Q_2... Q_n), la dérivée partielle de son énergie potentielle de déformation par rapport à l'action Q_i est égale au déplacement du point d'application de cette action suivant sa ligne d'action.

Cet énoncé nécessite quelques explications. Tout d'abord, par « déplacement du point d'application de l'action suivant sa ligne d'action » il convient d'entendre la projection du déplacement du point en question suivant le support de l'action.

En second lieu, le terme d'action doit être pris dans son sens le plus général : ce peut être une force, un couple, une pression…

Alors, le déplacement considéré du point d'application est le déplacement sur lequel l'action travaille.

Si l'action Q_i est une force, le déplacement est une translation ; si l'action Q_i est un couple, le déplacement correspondant est une rotation et si l'action considérée est une pression, le déplacement associé est une variation de volume.

4.1.2 Démonstration élémentaire

Considérons (fig. 4.1) un corps élastique linéaire chargé par le système d'actions extérieures (Q_1, Q_2... Q_n).

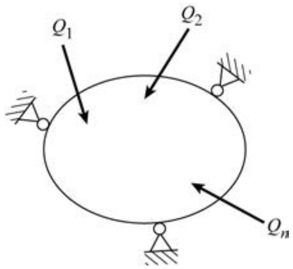


Fig. 4.1. Chargement d'un corps élastique

Les liaisons sont, dans un premier temps, supposées fixes. Sous l'effet de ces actions, le corps se déforme et acquiert une énergie potentielle U, énergie qui est, d'ailleurs, égale au travail réversible des actions extérieures sur les déplacements qu'elles induisent. Donnons alors à l'action Q_i un petit accroissement dQ_i. L'accroissement de l'énergie potentielle du système vaut :

$$dU = \frac{\partial U}{\partial Q_i} dQ_i$$

Maintenant, on décharge complètement le système et on commence par appliquer l'action dQ_i. Le point d'application de cette action subit un déplacement élémentaire $d\delta_i$ et le travail réversible de l'action dQ_i sur ce déplacement vaut $\frac{1}{2} dQ_i d\delta_i$. On applique ensuite le système entier des actions extérieures. Si l'action dQ_i n'existait pas, le système reprendrait son énergie potentielle U. Mais, du fait de la présence de dQ_i, l'énergie varie de la quantité de travail supplémentaire :

$$dQ_i \delta_i$$

de l'action dQ_i sur le déplacement δ_i provoqué par le système (Q_1, Q_2... Q_n), ou plutôt sur la projection du déplacement total sur la ligne d'action de dQ_i (ou de Q_i).

En fait, on passe d'un état initial à un état final donné par deux chemins différents. Les énergies potentielles sont donc les mêmes, ce qui permet d'écrire :

$$U + dQ_i \delta_i + \frac{1}{2} dQ_i d\delta_i = U + \frac{\partial U}{\partial Q_i} dQ_i$$

Or, le terme $\frac{1}{2} dQ_i d\delta_i$ est un infiniment petit du second ordre par rapport aux autres. Il est donc loisible de le négliger. Le théorème de Castigliano en découle donc :

$$\delta_i = \frac{\partial U}{\partial Q_i}$$

Cette démonstration suppose que le corps est à comportement élastique linéaire. En effet, s'il n'en était pas ainsi, le travail des forces extérieures serait différent selon l'ordre de chargement par rapport à dQ_i.

4.1.3 Extension du théorème de Castigliano aux systèmes dotés d'appuis élastiques

La précédente démonstration a été établie, pour des raisons de simplicité, en supposant que le système ne possédait que des liaisons fixes. En fait, elle reste valable en tout point si le système possède des liaisons élastiques linéaires. Dans ce cas, il suffit de considérer non pas le système sans ses appuis, mais l'ensemble du système incluant les appuis élastiques car ce qui a été établi au § 4.1.1 n'impose aucune restriction sur la forme ou la nature du système pourvu que son comportement soit élastique linéaire.

Bien entendu, dans l'expression de l'énergie potentielle U, il convient de tenir compte de l'énergie de déformation des liaisons élastiques. On suppose que ces liaisons sont au nombre de m. Pour la liaison n° α il existe donc une relation linéaire entre la réaction de liaison R_α et la projection du déplacement, notée x_α, sur la ligne d'action de R_α :

$$x_\alpha = -\lambda_\alpha R_\alpha \quad \text{avec} \quad \lambda_\alpha > 0$$

En distinguant l'énergie potentielle de déformation propre du système de l'énergie de déformation des liaisons élastiques, on écrit :

$$U = U_{def} + \frac{1}{2}\sum_1^m \lambda_\alpha \cdot R_\alpha{}^2$$

Pour l'application du théorème de Castigliano, il convient de considérer l'énergie totale U.

La dérivée partielle de U par rapport à une action donnée fournit le déplacement total résultant de la déformation propre du système et du déplacement lié à la souplesse des appuis élastiques.

4.2 Le théorème de Maxwell-Betti

4.2.1 Énoncé

On considère un système élastique linéaire doté de liaisons fixes, susceptible d'être soumis à deux systèmes d'actions indépendants (S_1) et (S_2).

Le travail des actions (S_1) sur les déplacements induits par les actions (S_2) est égal au travail des actions (S_2) sur les déplacements induits par les actions (S_1).

Ce théorème s'étend, sous cette même forme, au cas des systèmes comportant des liaisons élastiques linéaires, de la même façon que pour le théorème de Castigliano.

4.2.2 Démonstration élémentaire

On suppose que le système (S_1) est composé des actions (au sens général du terme) Q_1, Q_2... Q_n, appliquées aux points A_1, A_2... A_n, et que le système (S_2) est composé des actions Q'_1, Q'_2... Q'_k, appliquées aux points A'_1, A'_2... A'_k.

On commence par appliquer au système élastique le premier ensemble d'actions. Il se déforme et acquiert une énergie potentielle égale au travail réversible de ces actions sur les déplacements qu'elles induisent :

$$U = \frac{1}{2}\sum_1^n Q_i \delta_{A_i}(S_1)$$

en notant $\delta_{A_i}(S_1)$ le déplacement du point A_i dans la direction de Q_i induit par l'application de (S_1). On applique ensuite l'ensemble des actions (S_2). Sous l'effet de ces actions, le système élastique subit une nouvelle déformation indépendante de celle induite par (S_1) du fait de son comportement linéaire. L'énergie potentielle totale s'accroît du travail des forces Q'_i sur les déplacements qu'elles induisent :

$$\frac{1}{2}\sum_1^k Q'_i \delta_{A'_i}(S_2)$$

en appelant $\delta_{A'_i}(S_2)$ lesdits déplacements. Mais, en appliquant (S_2), on provoque de nouveaux déplacements au droit des points A_i, de sorte que les actions Q_i travaillent sur les déplacements induits aux points A_i par les actions (S_2). L'énergie de déformation correspondante est donc :

$$\frac{1}{2}\sum_1^n Q_i \delta_{A_i}(S_2)$$

Au total, lors du passage de l'état initial à l'état final, le système élastique acquiert une énergie totale égale à :

$$\frac{1}{2}\sum_1^n Q_i \delta_{A_i}(S_1) + \frac{1}{2}\sum_1^k Q'_i \delta_{A'_i}(S_2) + \sum_1^n Q_i \delta_{A_i}(S_2)$$

Si l'on applique maintenant les actions au système dans l'ordre inverse du précédent, on voit que l'énergie potentielle mise en jeu est de la forme :

$$\frac{1}{2}\sum_1^n Q_i \delta_{A_i}(S_1) + \frac{1}{2}\sum_1^k Q'_i \delta_{A'_i}(S_2) + \sum_1^k Q'_i \delta_{A'_i}(S_1)$$

Puisque l'on part d'un même état initial pour aboutir à un même état final, les deux expressions de l'énergie totale sont identiques, de sorte que :

$$\sum_1^n Q_i \delta_{A_i}(S_2) = \sum_1^k Q'_i \delta_{A'_i}(S_1)$$

ce qui démontre le théorème de Maxwell-Betti.

4.3 Application du théorème de Castigliano au calcul des déplacements dans les structures composées de poutres

4.3.1 Énergie potentielle de déformation d'une poutre

Il résulte de l'étude des contraintes effectuée au chapitre 3 que l'énergie potentielle de déformation d'une poutre par unité de longueur a pour expression :

$$\frac{dU}{dx} = \frac{N^2}{2ES} + \frac{M_y^2}{2EI_y} + \frac{M_z^2}{2EI_z} + \frac{T^2}{2GK} + \frac{V_y^2}{2GS_{1y}} + \frac{V_z^2}{2GS_{1z}}$$

Tous les termes de cette expression ne sont pas équivalents. Tout d'abord, les poutres faisant partie de structures parfaitement articulées ne travaillent qu'à l'effort normal. L'énergie potentielle de la structure se calcule donc uniquement à partir des termes de la forme $\frac{N^2}{2ES}$.
Lorsque les poutres travaillent en flexion et/ou en torsion, les déformations d'effort normal et d'effort tranchant sont généralement négligeables devant les déformations de flexion et/ou de torsion. Pour de telles poutres, on ne calcule donc, en général, leur énergie potentielle qu'à partir des termes :

$$\frac{dU}{dx} = \frac{M_y^2}{2EI_y} + \frac{M_z^2}{2EI_z} + \frac{T^2}{2GK}$$

Toutefois, dire que l'énergie de déformation due à l'effort normal et à l'effort tranchant est négligeable ne veut pas dire que ces efforts internes n'existent pas dans les poutres.

4.3.2 Calcul des déplacements dans une structure à poutres dotée de liaisons invariables

Compte tenu de ce qui vient d'être établi, l'énergie potentielle d'un système composé de poutres a pour expression :
– s'il s'agit d'un système à poutres articulées :

$$W = \sum \int \frac{N^2}{2ES} dx$$

– s'il s'agit d'un système de poutres travaillant en flexion et/ou en torsion :

$$W = \sum \int \left(\frac{M_y^2}{2EI_y} + \frac{M_z^2}{2EI_z} + \frac{T^2}{2GK} \right) dx \text{ (ou } ds\text{)}$$

Les efforts internes sont, dans la majorité des situations pratiques, des fonctions linéaires des actions appliquées à la structure. Si cette structure est dotée d'appuis élastiques, il faut ajouter à W le terme correspondant à l'énergie acquise par ces appuis :

$$\frac{1}{2} \sum_1^m \lambda_\alpha R_\alpha^2$$

Dans les expressions de W, le symbole $\int$ représente la sommation (intégrale) le long d'une poutre, et le symbole $\sum$ représente la sommation portant sur l'ensemble de toutes les poutres.

Si l'on veut calculer le déplacement en un point de la structure où est appliquée une action Q, et suivant la ligne d'action de Q, il suffit d'appliquer directement le théorème de Castigliano en dérivant partiellement W (et son terme complémentaire s'il y a lieu) par rapport à Q.

Si l'on veut calculer le déplacement en un point de la structure où aucune action n'est appliquée, et dans une direction donnée, on introduit un facteur sollicitant fictif Φ au point désiré et dans la direction voulue. On peut alors écrire en toute section de toutes les poutres :

$$N = N(Q+\Phi) = N(Q) + N(\Phi)$$

$$M = M(Q+\Phi) = M(Q) + M(\Phi)$$

$$T = N(Q+\Phi) = T(Q) + T(\Phi)$$

Dans ces expressions, on représente symboliquement par Q l'ensemble des actions extérieures données. M représente le moment fléchissant de façon globale ($M = M_y$ ou M_z) de façon à simplifier les écritures.

Comme le matériau constitutif des poutres a un comportement supposé linéaire, on peut également écrire :

$$N(\Phi) = \Phi \cdot n \qquad M(\Phi) = \Phi \cdot m \qquad T(\Phi) = \Phi \cdot t$$

n, m et t s'interprètent comme étant l'effort normal, le moment fléchissant et le moment de torsion provoqués, dans la structure, par un facteur sollicitant $\Phi = 1$ dans la direction souhaitée. On considère, pour simplifier, une structure à barres articulées dépourvue d'appuis élastiques. On peut donc écrire :

$$W = W(Q+\Phi) = \sum \int \frac{[N(Q) + \Phi n]^2}{2ES} dx$$

Pour calculer le déplacement au droit du point d'application du facteur Φ selon sa ligne d'action, on applique directement le théorème de Castigliano, ce qui donne :

$$\delta = \frac{\partial W}{\partial \Phi} = \sum \int \frac{n[N(Q) + \Phi n]}{ES} dx$$

Mais le facteur Φ est un facteur sollicitant fictif, il suffit de faire $\Phi = 0$, et l'on obtient le résultat recherché :

$$\delta = \left\{ \frac{\partial W}{\partial \Phi} \right\}_{\Phi=0} = \sum \int \frac{nN(Q)}{ES} dx$$

Dans le cas d'une structure dont les poutres travaillent en flexion/torsion, on obtient un résultat analogue :

$$\delta = \left\{ \frac{\partial W}{\partial \Phi} \right\}_{\Phi=0} = \sum \int \frac{mM(Q)}{EI} dx + \int \frac{tT(Q)}{GK} dx$$

En résumé, pour calculer le déplacement en un point d'une structure suivant une direction donnée, la structure étant sollicitée par un ensemble d'actions extérieures (Q), on applique en ce point, et suivant la direction voulue, un facteur sollicitant unité. En l'absence de tout autre chargement, ce facteur sollicitant induit dans la structure des sollicitations (n, m, t). Le déplacement cherché est obtenu par la formule généralisée suivante :

$$\delta = \sum \int \frac{mM(Q)}{EI} dx + \sum \int \frac{tT(Q)}{GK} dx + \sum \int \frac{nN(Q)}{ES} dx$$

REMARQUE

Si la structure comporte des poutres courbes, les intégrales portent sur la fibre moyenne de ces poutres. L'élément différentiel dx doit être remplacé par l'élément différentiel ds (s étant l'abscisse curviligne).

4.3.3 Cas des structures composées de poutres avec appuis élastiques

Lorsque la structure étudiée comporte des appuis élastiques, le raisonnement développé au paragraphe précédent s'étend facilement. En effet, la réaction d'appui R_α de l'appui n° α, lorsque la structure est soumise aux actions extérieures (Q) et à l'action fictive Φ, peut s'écrire :

$$R_\alpha = R_\alpha(Q) + R_\alpha(\phi) = R_\alpha(Q) + \phi r_\alpha$$

en notant r_α la réaction de l'appui n° α sous l'effet de $\phi = 1$.

Le terme d'énergie complémentaire a pour expression :

$$\frac{1}{2} \sum_\alpha \lambda_\alpha [R_\alpha(Q) + \phi r_\alpha]^2$$

Si on le dérive par rapport à ϕ et si l'on fait $\phi = 0$ ensuite, on constate qu'il faut ajouter, à l'expression précédemment établie du déplacement, le terme :

$$\sum_\alpha \lambda_\alpha R_\alpha(Q) r_\alpha$$

L'expression généralisée du déplacement est donc :

$$\delta = \sum \int \frac{mM(\mathrm{Q})}{EI} dx + \sum \int \frac{tT(\mathrm{Q})}{GK} dx + \sum \int \frac{nN(\mathrm{Q})}{ES} dx + \sum_\alpha \lambda_\alpha R_\alpha(Q) r_\alpha$$

4.3.4 Calcul pratique des intégrales de Mohr

Les intégrales de type $\sum \int \frac{mM(\mathrm{Q})}{EI} dx$ sont appelées *intégrales de Mohr*. Lorsque de telles intégrales portent sur des poutres droites d'inertie constante (ou, plus généralement, de caractéristiques constantes), elles peuvent, dans les cas simples, être calculées par une méthode « géométrique » expliquée ci-après. On considère l'intégrale :

$$J = \int_0^L f(x) \cdot g(x) dx$$

où l'une au moins des deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ est linéaire. On suppose, pour fixer les idées, que :

$$f(x) = ax + b$$

Alors,

$$J = a\int_0^L x \cdot g(x)\,dx + b \cdot \int_0^L g(x)\,dx$$

On trace (fig. 4.2) les courbes représentatives des fonctions $f(x)$ et $g(x)$. On suppose que sur l'intervalle $(0, L)$ la fonction $g(x)$ reste de signe constant.

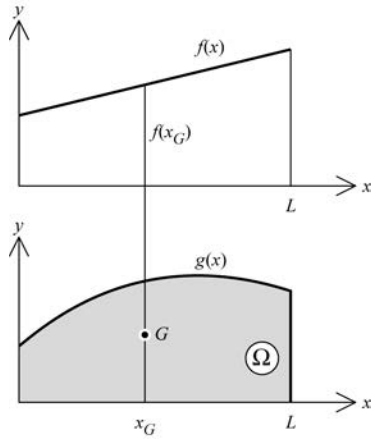


Fig. 4.2. Calcul des intégrales de Mohr

Le terme $\int_0^L g(x)\,dx$ représente l'aire Ω délimitée par la courbe $g(x)$ avec l'axe Ox sur $(0, L)$. Cette aire est positive si la fonction $g(x)$ est positive, négative dans le cas contraire.

Le terme $\int_0^L x \cdot g(x)\,dx$ est le moment statique de cette aire Ω, par rapport à l'axe Oy. Il est de même signe que Ω. On appelle x_G l'abscisse du centre de gravité de Ω. On peut écrire :

$$\int_0^L x \cdot g(x)\,dx = \Omega \cdot x_G$$

Ainsi, l'intégrale J vaut :

$$J = \Omega(ax_G + b) = \Omega f(x_G)$$

Cette formule fournit une méthode de calcul pratique et rapide des intégrales du type J, et donc de certaines intégrales de Mohr. Pour cela, il est utile de connaître l'aire et la position du centre de gravité de certaines figures. Les formules présentées sur la figure 4.3 permettent de calculer certaines intégrales de Mohr dans les cas les plus courants.

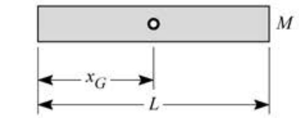
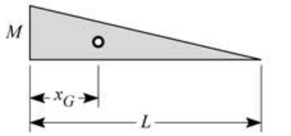
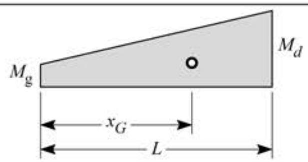
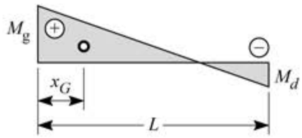
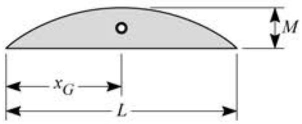
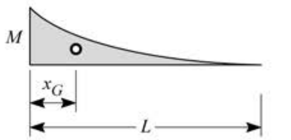
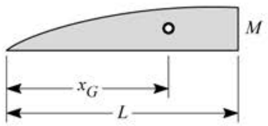
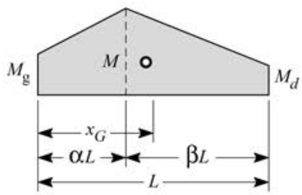
	**Diagramme rectangulaire** $S = ML \qquad x_G = \frac{1}{2}L$
	**Diagramme triangulaire** $S = \frac{1}{2}ML \qquad x_G = \frac{1}{3}L$
	**Diagramme trapézoïdal** $S = \frac{1}{2}L(M_g + M_d) \qquad x_G = \frac{1}{3}L\,\frac{2M_d + M_g}{M_d + M_g}$
	**Diagramme trapézoïdal** $S = \frac{1}{2}L(M_g - M_d) \qquad x_G = \frac{1}{3}L\,\frac{M_g - 2M_d}{M_g - M_d}$
	**Diagramme parabolique** $S = \frac{2}{3}ML \qquad x_G = \frac{1}{2}L$
	**Diagramme semi-parabolique** $S = \frac{1}{3}ML \qquad x_G = \frac{1}{4}L$
	**Diagramme semi-parabolique** $S = \frac{2}{3}ML \qquad x_G = \frac{5}{8}L$
	**Diagramme trapézoïdal** M, M_g, M_d en valeur algébrique $S = \frac{1}{2}L(\alpha M_g + M + \beta M_d)$ $x_G = \frac{1}{3}L\,\frac{\alpha^2 M_g + (1+\alpha)M + \beta(3-\beta)M_d}{\alpha M_g + M + \beta M_d}$

Fig. 4.3. Calcul d'intégrales de Mohr